ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 - *материјали за 30.3.2020.*

РЕДОВИ

Данијела Бранковић, danijela@etf.rs

1. ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА (20)

1. Заокружити слова испред конвергентних редова:

а) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n^2+2}$; ***б)*** $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$; ***в)*** $\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$; ***г)*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n$; ***д)*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$;

ђ) ниједан од предходно понуђених одговора није тачан. (***септембар 2018.***)

2. Одредити полупречник конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n^2}x^n$.

$\left(R=e^{-1/2}\right)$ (***септембар 2018.***)

3. Заокружити слова поред тачних тврђења:

а) Ако је за све $n\in\mathbb{N}$ $a_n\le b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ конвергира, онда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ конвергира.

б) Ако $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ конвергирају, онда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n+b_n\right)$ конвергира.

в) Ако је за све $n\in\mathbb{N}$ $a_n\le b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ конвергира, онда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ конвергира.

г) Ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. (***јул 2018.***)

4. Нека је $p>1$. Одредити полупречник конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{p^{n^2}}x^n$.

$\left(R=+\infty\right)$ (***јул 2018.***)

5. Заокружити слова испред тачних одговора:

а) $a_n \to 0\left(n \to +\infty\right)$ је довољан услов да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира;

б) $a_n \to 0\left(n \to +\infty\right)$је потребан услов да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира;

в) $a_n \to a\left(a \neq 0\right)\left(n \to +\infty\right)$ је довољан услов да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира;

г) ниједан од претходно понуђених одговора није тачан. (***јун 2018.***)

6. Одредити полупречник конвергенције реда $\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n$. $\left(R=3\right)$ (***јун 2018.***)

7. Одредити вредност реалног параметра p за које ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{3n^2}\right)n^{p-1}\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$ конвергира. $\left(p<8\right)$ (***фебруар 2018.***)

8. Заокружити слова испред тачних једнакости:

а) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}=\sin 1-1;$ ***б)*** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2;$ ***в)*** $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e-\frac{3}{2};$ ***г)*** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{7^n}=\frac{1}{6};$

д) ниједна од претходно понуђених једнакости није тачна. (***фебруар 2018.***)

9. Заокружити слова испред тачних тврђења:

а) ако је $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=S\in\mathbb{R}$, онда је $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S;$

б) ако ред $\sum_{n=20}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=10}^{+\infty} a_n;$

в) ако ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира, онда $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty;$

г) ако ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0;$

д) ниједан од претходно понуђених одговора није тачан. (***октобар 2017.***)

10. За коју вредност параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)$?

$(\alpha > -2)$ (***октобар 2017.***)

11. Заокружити слова поред конвергентних редова:

а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$; ***б)*** $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$; ***в)*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n}$;

г) ниједан од предходно понуђених одговора није тачан. (***септембар 2017.***)

12. Одредити полупречник конвергенције реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{8^n} x^{2n+1}$.

$\left(R = 2\sqrt{2}\right)$ (***септембар 2017.***)

13. Одредити вредност параметра $q \in \mathbb{R}$ за коју конвергира ред $\sum_{n=1}^{+\infty} n^9 \ln\left(1+\frac{1}{n^q}\right)$.

$(q > 10)$ (***јул 2017.***)

14. Заокружити слова испред тачних једнакости:

а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$; ***б)*** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e-2$; ***в)*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1 - 1$; ***г)*** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin 1 - 1$;

д) ниједан од претходно понуђених одговора није тачан. (***јул 2017.***)

15. Заокружити слова испред конвергентних редова:

а) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+n}{1-n}\right)$; ***б)*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(5n-2)$; ***в)*** $\sum_{n=5}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{(5n^{3/2}+2)\sqrt{n}}\right)$; ***г)*** $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n}$;

д) ниједан од претходно понуђених редова није конвергентан. (***јун 2017.***)

16. Дат је степени ред $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 1$. Одредити полупречник конвергенције датог степеног реда. $(R = +\infty)$ (***јун 2017.***)

17. Заокружити слова поред тачних тврђења:

а) Ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^n$ конвергира ако и само ако $-2 \le a \le 2$;

б) Ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3\alpha}}$ конвергира ако и само ако $\alpha > 3$;

в) Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира ако и само ако $\sum_{n=10}^{+\infty} a_n$ конвергира;

г) Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира ако и само ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;

д) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. (***фебруар 2017.***)

18. Нека је $p \in \mathbb{R}$. Одредити полупречник конвергенције реда $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$.

$\left(R = 2^p\right)$ (***фебруар 2017.***)

19. Заокружити слова испред тачних једнакости:

а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^n = \frac{3}{4}$; ***б)*** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln 5}{n!} = 5$; ***в)*** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n = 0$; ***г)*** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n} = \ln 3$;

д) ниједна од претходно понуђених једнакости није тачна. (***октобар 2016.***)

20. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

$\left(R = 4\right)$ (***октобар 2016.***)

<u>2. ИСПИТНИ ЗАДАЦИ</u> (10)

1. **[9]** Одредити област конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^2}x^n$. $\left([-1,1]\right)$

(***септембар 2018.)***

2. **[3+3+3]** Испитати конвергенцију редова:

а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$; ***б)*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; ***в)*** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

(***а***) према Даламберовом критеријуму, дати ред дивергира)

(***б)*** Према Кошијевом критеријуму, дати ред дивергира)

(***в)*** Према Лајбницовом критеријуму, дати ред конвергира) (***јул 2018.***)

3. **[9]** Одредити област конвергенције и наћи суму реда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

$\left(S(x) = 2x\mathrm{arctg}x - \ln\left(1+x^2\right),\ x \in [-1,1]\right)$ (***јун 2018.***)

4. **[8]** Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right),\ p>0$.

$$\begin{cases} \text{дати ред апсолутно конвергира за } p>1 \\ \text{дати ред условно конвергира за } \frac{1}{2}<\mathrm{p}\le 1 \\ \text{дати ред дивергира за } p \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

(***фебруар 2018.***)

5. **[8]** Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)^{n+q}}{(n+q)^{n+p}}$ у зависности од вредности параметара $p, q \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{cases} \text{дати ред конвергира за } p-q>1 \\ \text{дати ред дивергира за } p-q \le 1 \end{cases}$$

(***октобар 2017.***)

6. **[9]** Одредити област конвергенције и наћи суму степеног реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2n-1} x^{2n-1}$ у затвореном облику. $\left(S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x},\ x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ (***септембар 2017.***)

7. **[8]** Испитати конвергенцију нумеричког реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$, где је $a_n>0$ неконстантан аритметички низ. $\left(\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \text{дати ред одређено дивергира}\right)$ (***јул 2017.***)

8. **[8]** Испитати за које $p \in \mathbb{R}$ конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$. $\left(p > \frac{3}{2} \right)$ (***јун 2017.***)

9. **[8]** Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$.

(Према Лајбницовом критеријуму, дати ред конвергира) (***фебруар 2017.***)

10. **[8]** У зависности од вредности реалног параметра p, испитати конвергенцију реда

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \right)^p \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right)$. $\left(p > -2 \right)$ (***октобар 2016.***)